VEJLEDENDE EKSEMPLER PÅ

EKSAMENSOPGAVER I MATEMATIK

HF B-NIVEAU

INDHOLDSFORTEGNELSE

VEJLEDENDE EKSEMPLER
PÅ EKSAMENSOPGAVER I MATEMATIK
HF B-NIVEAU

Kan bestilles ved skriftlig henvendelse til
LMFK-Sekretariatet, Slotsgade 2, 3. sal, 2200 Kbh. N.
ISBN 87-90996-21-6
Redaktør: Gert Schomacker, Jørgen Dejgaard
Grafisk tilrettelæggelse af omslag: Kurt Finsten
Typografering og grafisk tilrettelæggelse af indmad: Jens Jørn Pedersen
Tryk: Ethelberg Bogtryk

Forord

Matematik B på hf er beskrevet gennem henholdsvis læreplan, undervisningsvejledning og de to vejledende eksamenssæt. De faglige mål for undervisningen og bedømmelseskriterierne ved de afsluttende eksamener findes beskrevet i læreplanen.

Om specielt den skriftlige prøve hedder det i læreplanen: *Det skriftlige eksamenssæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet og skal evaluere de tilsvarende faglige mål*. I undervisningsvejledningens hovedafsnit 2 er der gennem en lang række eksempler redegjort nærmere for, hvad dette betyder.

Med de vejledende eksamenssæt illustreres dels omfang og opbygning af et sådant sæt, dels hvorledes den konkrete udformning af forskellige spørgsmål kunne være.

De vejledende eksamenssæt er udarbejdet af en vejledende opgavekommission. I forarbejdet blev der produceret betydeligt flere opgaver, end der blev anvendt. Disse velegnede, men overskydende opgaver har opgavekommissionen stillet til rådighed for Matematiklærerforeningen med henblik på en udgivelse. Denne udgivelse af vejledende eksamensopgaver kan ikke træde i stedet for læreplan og undervisningsvejledning, men skal alene ses som et yderligere materiale til støtte for undervisningen frem mod den skriftlige eksamen.

Opbygning af eksamenssættene

Til den skriftlige prøve på B-niveau gives der 4 timer. Den første del af sættet skal besvares uden hjælpemidler. Til denne del af prøven gives der 1 time, hvorefter besvarelsen afleveres. Under den anden del af prøven må eksaminanden benytte alle hjælpemidler, bortset fra kommunikation med omverdenen. Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over et CAS-værktøj, der kan udføre symbolmanipulation. De nærmere krav er beskrevet i undervisningsvejledningens afsnit 3.3.

Delprøven med hjælpemidler kan indeholde valgfrie opgaver. Er dette tilfældet vil det tydeligt fremgå, hvor mange af de valgfrie opgaver der må afleveres til bedømmelse.

Hvert spørgsmål i et eksamenssæt repræsenterer 5 point. Et spørgsmål kan indeholde delspørgsmål. En fuldstændig besvarelse giver 100 point. I hvert sæt vil et antal point være reserveret til en bedømmelse af helhedsindtrykket af opgavebesvarelsen.

Formulering af eksamensopgaverne

Af undervisningsvejledning og følgebrevet til de vejledende eksamenssæt fremgår:

Ved beregninger af enhver art arbejdes der inden for mængden af reelle tal eller delmængder heraf. Komplekse tal vil derfor aldrig høre med til en ønsket løsningsmængde.

I en opgavetekst vil det ofte forekomme, at grundmængden for en ligning ikke direkte er nævnt. Det er da altid underforstået, at grundmængden skal vælges så omfattende som muligt inden for de reelle tal.

Ligeledes vil det ofte forekomme, at definitionsmængden for en givet reel funktion ikke udtrykkeligt er angivet i opgaveteksten. I sådanne tilfælde er det altid underforstået, at definitionsmængden er den mest omfattende delmængde af de reelle tal, inden for hvilken den angivne forskrift har mening. En modelsituation kan lægge begrænsninger på variationen af de variable ud over de rent matematiske begrænsninger. Er dette ikke eksplicit angivet i opgaveformuleringen, er det en del af besvarelsen at redegøre for, hvilke intervaller der arbejdes indenfor.

Brug af ord som 'skitse' og 'tegn' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at kursisterne opnår indsigt i, hvilke detaljer der bør medtages i en skitse eller modeltegning. En skitse af et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation skal vise de karakteristiske egenskaber eller fænomener, som er væsentlige for opgavens besvarelse. Eksempelvis tegnes spidse vinkler som spidse og modeller af trekanter tegnes ikke som retvinklede, hvis dette ikke fremgår af oplysningerne. For et grafisk forløb kan skæringspunkter med akserne, beliggenhed af lokale ekstrema, monotoniforhold eller asymptotisk forløb hver for sig være væsentlige at tage med i en skitse, alt afhængig af opgaven.

Brug af formuleringer som 'løs ligningen', 'bestem nulpunkter' eller 'beregn skæringspunkter mellem to grafer' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at kursisterne opnår indsigt i styrke og svagheder ved symbolske over for numeriske metoder til at løse ligninger og andre matematiske problemer. Dette vil sætte kursisterne i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden i en given løsningsmetode samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl. I opgaver, hvor der ønskes en begrundelse for antallet af løsninger eller for, at den samlede løsningsmængde er bestemt, vil dette fremgå af opgaveteksten.

I opgaver, hvor der skal argumenteres for, at den samlede løsningsmængde er bestemt, eller hvor der skal bestemmes lokale ekstrema, vil der ofte være forskellige veje til målet, og der foreskrives ikke nogen bestemt metode. Det er en del af undervisningen, at kursisterne opnår indsigt i dette, herunder, hvorledes man kan argumentere ved hjælp af $f'(x)$.

I opgaver inden for integralregning vil det altid fremgå af opgaveteksten, hvis man ønsker angivelse af en stamfunktion eller et ubestemt integral. Når ubestemte integraler bestemmes ved hjælp af et CAS-værktøj, forventes det ikke, at kursisterne kan omskrive et svar, hvori der indgår funktioner, som ikke er en del af kernestoffet.

I delprøven med hjælpemidler kan der i modelsituationer optræde funktionsudtryk, som ikke direkte er nævnt i kernestoffet. Sådanne udtryk forventes eksaminanderne at kunne differentiere og integrere med brug af et CAS-værktøj, jfr. vejledningens afsnit 2d.

I en modelopgave kan eksaminanderne få et datamateriale for sammenhængen mellem variable samt oplysninger om, hvilken matematisk modeltype der kan beskrive materialet. Eksaminanderne skal kunne opstille og håndtere denne model, herunder stille spørgsmål til og besvare spørgsmål vedrørende modellen, men de forventes ikke ved den skriftlige eksamen at kunne begrunde én bestemt model frem for andre. Det forventes, at eksaminanderne kan udføre lineær, eksponentiel og potensregression.

Matematisk notation og matematiske symboler vil i alle tilfælde, hvor der ikke foreligger entydige internationale regler, blive anvendt ud fra det sigte at gøre opgaveteksten læsevenlig for eksaminanden.

Ligesom e^{kx}, a^x, $\frac{1}{x}$ og $\sqrt{x}$ både kan betegne funktionen og en funktionsværdi, således kan det også generelt forekomme, at symbolet $f(x)$ anvendes til både at betegne en funktion og en funktionsværdi.

Konteksten vil afgøre, om det er hensigtsmæssigt eller ej at anvende parenteser i udtryk som $\ln(x)$ og $\ln x$ osv. Kan det misforstås, vil man altid sætte parenteser som i $\ln(a\ \ b)$.

Der anvendes som standard dansk komma: 1,53 og ikke 1.53. Ved angivelse af koordinater kan der dog blive anvendt decimalpunktum, hvis det danske komma kan give anledning til misforståelser: Vi vil tillade os at skrive: (1.5 , 4) i stedet for (1,5 , 4). Hvis et udklip benytter decimalpunktum, vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen.

Punkter i et koordinatsystem kan både blive angivet på formen $P(2,3)$ og alene med koordinatsættet (2,3).

Delprøven uden hjælpemidler

Af undervisningsvejledningen og følgebrevet til de vejledende eksamenssæt fremgår, at det forventes eksaminanderne kan:

- opstille enkle formler ud fra en sproglig beskrivelse
- anvende nulreglen og løse simple første og 2. gradsligninger
- anvende kvadratsætningerne og reducere udtryk, der ikke er meget komplicerede
- sætte tal ind i forskrifter
- håndtere eksponentiel notation og anvende potensreglerne
- isolere ukendte størrelser
- redegøre for andengradspolynomiers grafer
- bestemme lineære og eksponentielle regneforskrifter
- differentiere polynomier, potensfunktioner, e^{kx} og $\ln(x)$
- anvende de regneregler for differentiation, som er beskrevet i kernestoffet
- bestemme en tangentligning
- anvende viden om sammenhængen mellem afledet funktion og monotoniforhold
- aflæse væksthastighed grafisk
- bestemme stamfunktioner til polynomier, potensfunktioner, e^{kx} samt funktionen $\frac{1}{x}$
- anvende viden om sammenhængen mellem stamfunktion og areal.

Bedømmelse af opgavebesvarelsen

I læreplanens afsnit 4.3 er opridset de bedømmelseskriterier, der lægges til grund for bedømmelsen af såvel skriftlige som mundtlige præstationer. Det vil altid afhænge af det konkrete eksamensspørgsmål, hvilke af de omtalte kriterier der er i spil i den givne situation. I nedenstående citat er således udeladt nogle punkter, der ikke vedrører skriftlig eksamen:

Bedømmelsen er en helhedsvurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de faglige mål, som er angivet i 2.1.

Der lægges vægt på, om eksaminanden:

1) har grundlæggende matematiske færdigheder, herunder:

– kan håndtere matematisk symbolsprog og matematiske begreber

– har kendskab til matematiske metoder og kan anvende dem korrekt

- færdighed i at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt.

2) kan anvende matematik på foreliggende problemer, herunder:

- kan vælge hensigtsmæssige metoder til løsning af forelagte problemer
- kan præsentere et matematisk emne eller en fremgangsmåde ved løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde
- kan redegøre for foreliggende matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde.

3) har overblik over og kan perspektivere matematik, herunder:

- …
- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling.

I undervisningsvejledningens afsnit 4.g hedder det specielt om bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt, at der i bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart, herunder om der i opgavebesvarelsen er:

- en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på
- en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik
- en dokumentation ved et passende antal mellemregninger
- en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde, herunder den eventuelle brug af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder
- en brug af figurer og illustrationer
- en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer
- en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden
- en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og med brug af almindelig matematisk notation.

Mange spørgsmål har en sådan udformning, at der kan være flere veje til en fuldt tilfredsstillende besvarelse. Alle spørgsmål kan besvares til fuldt pointtal på grundlag af kernestoffet. Men har eksaminanderne en yderligere indsigt, som de forstår at udnytte, kan dette belønnes i helhedsindtrykket.

Bjørn Grøn, *fagkonsulent*

VEJLEDENDE EKSAMENSOPGAVER

HF B-NIVEAU   UDEN HJÆLPEMIDLER

1.001 Reducér udtrykket $\dfrac{a^7 \; a^2}{a^4}$.

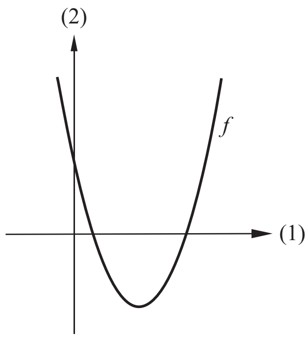
1.002 Reducér udtrykket $\dfrac{a^5}{(a^2)^3}$.

1.003 Løs ligningen $x^2 \quad x \quad 6 \quad 0$.

1.004 Reducér $\quad a \quad b \;^2 \quad 2a \;\; a \quad b \quad$.

1.005 Isolér x i ligningen $y \quad a^x$.

1.006 Figuren viser grafen for funktionen $f(x) \quad ax^2 \quad bx \quad c$.



a) Bestem ud fra grafen fortegnet for hvert af tallene a, b og c .

1.007 Et andengradspolynomium f har følgende forskrift:

$$f(x) \quad x^2 \quad 6x \quad c\,.$$

a) Bestem, for hvilken værdi af c andengradspolynomiet f har netop én rod.

1.008 En parabel er givet ved

$$y \quad x^2 \quad 4x \quad 7\,,$$

og en ret linje er givet ved

$$y \quad 4x \quad 3.$$

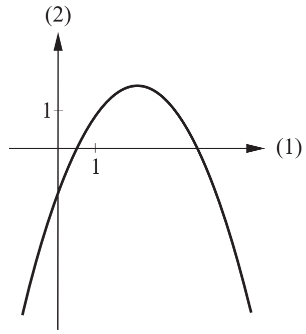
a) Gør rede for, at parablen og linjen skærer hinanden i to punkter.

1.009 Vis, at 2 er nulpunkt i polynomiet $f(x) \quad x^3 \quad 4x^2 \quad 4x \quad 16$.

1.010 I vand stiger trykket med 1 atmosfære for hver 10 meters vanddybde. Ved overfladen er trykket 1 atmosfære. Derfor vil trykket stige til 2 atmosfære på 10 meters vanddybde, 3 atmosfære på 20 meter osv.

a) Opstil en formel, der beskriver sammenhængen mellem tryk og vanddybde.

1.011 Figuren viser en parabel med ligningen $y \quad \frac{1}{2}x^2 \quad bx \quad c$.



a) Bestem fortegnet for hvert af tallene c, b og d, hvor d betegner diskriminanten.

1.012 Funktionen f er givet ved

$$f(x) \quad (x \quad 1) \quad (x^2 \quad 4x \quad 6)\,.$$

a) Vis, at f har netop ét nulpunkt.

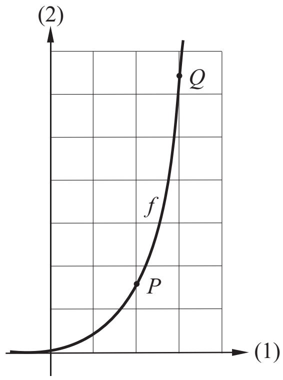
1.013 Grafen for den lineære funktion $f(x) \quad 3x \quad b$ går gennem punktet $P(1, \ 4)$.

a) Bestem tallet b.

1.014 For springhaler gælder, at deres vægt med god tilnærmelse er proportional med længden i 3. potens.

a) Indfør passende betegnelser, og opskriv en formel, der angiver vægten af en springhale udtrykt ved længden.

1.015



Figuren viser grafen for en eksponentielt voksende funktion $f(x) \quad b \quad a^x$.
Grafen går gennem punkterne $P(2,8)$ og $Q(3,32)$.

a) Bestem tallene a og b.

1.016 En funktion f er givet ved

$$f(x) \quad e^{2x} \quad 3x .$$

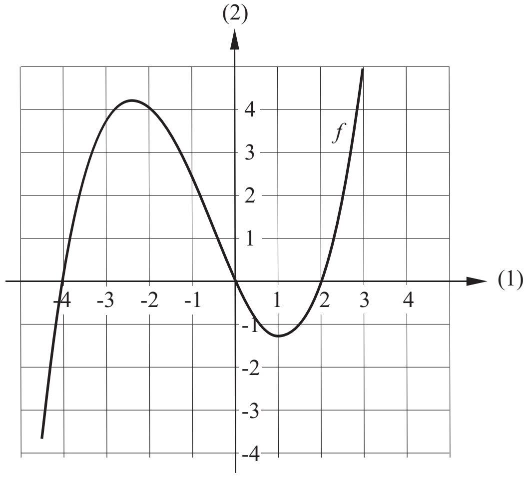
a) Bestem $f'(x)$, og undersøg, om der findes en tangent til grafen for f med hældningskoefficienten $\ 1$.

1.017 En funktion f er givet ved

$$f(x) \quad 2x^2 \quad 4x \quad 4 .$$

a) Bestem monotoniforholdene for f.

1.018 Figuren viser grafen for en differentiabel funktion f.



a) Bestem ud fra grafen $f'(2)$.

1.019 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) \quad 3x^2 \quad 2\ln(x).$$

a) Bestem $f'(2)$.

1.020 En funktion f er givet ved $f(x) \quad \frac{1}{3}x^3 \quad \mathrm{e}^{4x}$.

a) Bestem $f'(x)$.

1.021 En funktion f er bestemt ved $f(x) \quad x^3 \quad x^2$.

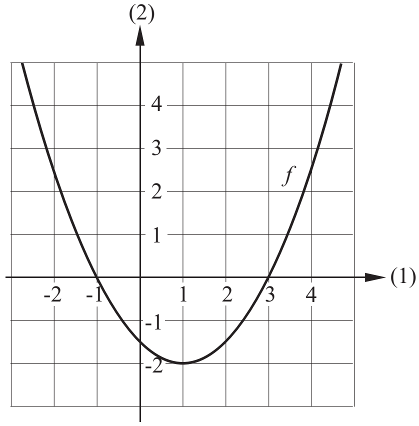
a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

1.022 En funktion f er givet ved

$$f(x) \quad 8x^3 \quad 2x^2 \quad 3x \quad 10.$$

a) Bestem en stamfunktion til f.

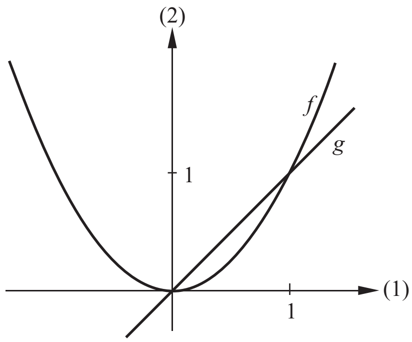
1.023



Figuren viser grafen for en funktion f.

a) Løs grafisk ligningen $f'(x) \quad 0$. Begrund svaret.

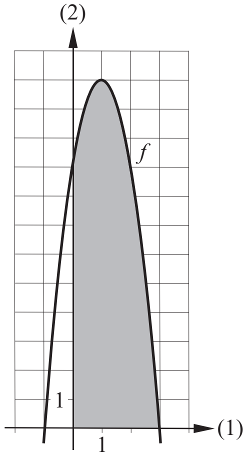
1.024 På figuren er tegnet graferne for $f(x) \quad x^2$ og $g(x) \quad x$.



Graferne for f og g skærer hinanden i punkterne med koordinatsættene (0,0) og (1,1).

a) Bestem arealet af det område, der begrænses af de to grafer.

1.025

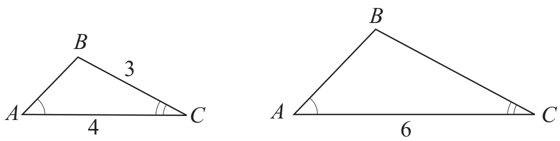


Figuren viser grafen for funktionen $f(x) \quad 9 \quad 3x^2 \quad 6x$. Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i intervallet [0; 3] og andenaksen et område, der er skraveret på figuren.

a) Beregn arealet af dette område.

1.026 Bestem $(\frac{1}{x} \quad 4x)dx$, $x \quad 0$.

1.027 Trekanterne ABC og $A'B'C'$ er ensvinklede.

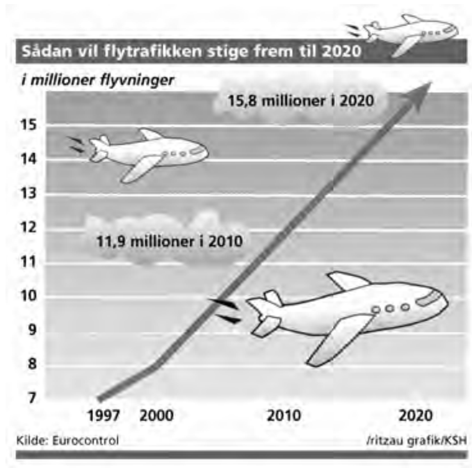


a) Bestem længden af siden $B'C'$.

VEJLEDENDE EKSAMENSOPGAVER

HF B-NIVEAU   MED HJÆLPEMIDLER

2.001



Kilde: Dagbladet, 3.10.02

Ovenstående figur viser den forventede udvikling i flytrafikken over Europa indtil 2020. Ifølge denne figur vil antallet af flyvninger vokse lineært i perioden 2000-2020.

a) Bestem en regneforskrift af formen $f(x) \quad ax \quad b$, hvor $f(x)$ betegner antallet af flyvninger x år efter 2000.

b) Gør rede for, hvad tallene a og b fortæller om udviklingen i flytrafikken.

c) I hvilket år vil antallet af flyvninger overstige 14 millioner?

2.002 Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) \quad 2x^2 \quad 0{,}5x \quad 3 \quad \text{og} \quad g(x) \quad 4{,}2x \quad 5 .$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem graferne for f og g.

2.003 En parabel har ligningen $y \quad 0{,}5x^2 \quad 0{,}5x \quad 3$, og en ret linje har ligningen $y = 1{,}5x + b$.

a) Bestem den værdi af b, hvor parablen og linjen har netop ét fælles punkt.

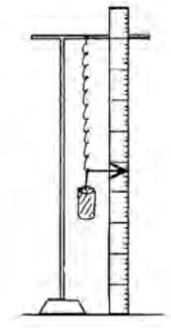
2.004 Et andengradspolynomium f er bestemt ved

$$f(x) \quad ax^2 \quad bx \quad c .$$

Det oplyses, at f har nulpunkterne –2 og 4, samt at $f(1) \quad 4{,}5$.

a) Bestem tallene a, b og c.

2.005



Ved et laboratorieforsøg hænges en fjeder op ved siden af en målestok. Når der hænges et lod på fjederen, bliver fjederen længere. Fjederens position aflæses på målestokken ud for pilen (se figur). Nedenstående tabel viser en række måleresultater.

Loddets vægt (gram)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Fjederens position (cm)	13,0	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5	31,5	34,5	38,0	40,5

Det oplyses, at fjederens position som funktion af loddets vægt med god tilnærmelse kan beskrives ved en matematisk model af formen $f(x) \quad ax \quad b$, hvor $f(x)$ er fjederens position, målt i cm, og hvor x er loddets vægt, målt i gram.

a) Bestem tallene a og b, og gør rede for deres betydning for fjederen.

Der hænges et lod på fjederen, og fjederens position aflæses. Derefter hænges yderligere et lod på fjederen, og fjederens position aflæses igen.

b) Gør rede for, at ændringen af fjederens position er proportional med vægten af det lod, der hænges yderligere på.

2.006 En funktion f er givet ved

$$f(x) \quad 3x^2 \quad 12x \quad 5 .$$

a) Bestem værdimængden for f.

2.007 Stoffet natrium-24 er radioaktivt og omdannes gradvis til et andet stof (magnesium-24). Mængden af natrium-24 aftager eksponentielt som funktion af tiden med en halveringstid på 15,0 timer. Et præparat indeholder på et tidspunkt 3,00 g (mikrogram) natrium-24.

a) Hvor mange mikrogram natrium-24 er der tilbage efter 12,0 timer?

b) Hvor lang tid går der, før der er 0,50 g natrium-24 tilbage?

2.008 I en skov plantes en bestemt type fyrretræer med en højde på 1,7 m. Til de er 15 år gamle, vokser træernes højde med 17,3 % om året.

a) Opstil en formel, der beskriver træernes højde som funktion af antal år efter udplantningen.

b) Hvor højt er et 7 år gammelt træ ifølge modellen?

c) Med hvor mange procent vokser træernes højde i løbet af 3 år ifølge modellen?

Kilde: School of Resources, Environment & Society, The Australian National University.

2.009 Når lys trænger ned gennem vandet i en sø, aftager lysintensiteten med dybden. Lysintensiteten $f(x)$ er bestemt ved

$$f(x) \quad 100 \quad a^x \ ,$$

hvor x er dybden, målt i meter under søens overflade. For en bestemt ren og klar sø er lysintensiteten 16 i 5,0 meters dybde.

a) Bestem tallet a.

b) Bestem den dybde, der svarer til en lysintensitet på 2,1.

c) Bestem halveringskonstanten for f.

d) Hvad fortæller tallet a om, hvordan lysintensiteten aftager med voksende dybde i søen?

2.010 Ud fra et forsøg kunne procentdelen af hørplanter, der visnede som følge af svampeangreb, beskrives ved hjælp af modellen

$$f(x) \quad 100 \quad 182{,}2 \quad e^{\ 0,0756\,x} \quad , \quad x \quad 8 \ .$$

hvor x angiver antal dage efter plantningen, og $f(x)$ angiver procent ramte planter.

a) Hvor stor en procentdel af planterne var visnet efter 50 dage ifølge modellen?

Kilde: The American Phytopathological Society.

2.011 En funktion er givet ved $f(x) \quad 200 \ e^{0,04x}$.

a) Bestem funktionsværdien (to decimaler) for $x \quad 12$.

b) Hvor mange procent vokser f med pr. x-enhed?

2.012 En matematisk model for sammenhængen mellem den daglige indtagelse af frugt og grønt gennem længere tid og det årlige antal kræftdødsfald i Danmark er givet ved

$$f(x) = b \cdot x^a \,,$$

hvor $f(x)$ angiver det årlige antal kræftdødsfald i Danmark, og x er det gennemsnitlige daglige indtag af frugt og grønt i gram.
Nedenstående tabel viser antal kræftdødsfald for forskellige indtag af frugt og grønt.

Indtag af frugt og grønt (gram)	225	625
Antal kræftdødsfald	15 000	9 000

a) Bestem tallene a og b.

b) Hvad er det daglige indtag af frugt og grønt, hvis det årlige kræftdødsfald er 10 000?

c) Hvor mange procent ville det gennemsnitlige daglige indtag af frugt og grønt være større, hvis det årlige antal kræftdødsfald i Danmark var 5 % mindre?

2.013 Nedenstående tabel viser sammenhængen mellem vægt og energibehov for en række forskellige vadefugle:

Fuglens navn	Sand-løber	Almindelig ryle	Sneppe-klire	Strand-hjejle	Hvidvinget klire
Fuglens vægt i gram	28,4	56,7	99,2	226,8	255,2
Energibehov i KJ/døgn	67	109	167	301	327

Kilde: OIKOS 37:1

For disse vadefugle gælder med god tilnærmelse, at energibehovet som funktion af fuglens vægt kan beskrives ved en funktion af formen $f(x) = b \cdot x^a$.

a) Bestem tallene a og b.

En islandsk ryle vejer 84 % mere end en canadisk præstekrave. Begge disse vadefugle er omfattet af ovenstående sammenhæng.

b) Hvor mange procent er energibehovet større for en islandsk ryle end for en canadisk præstekrave?

2.014 I et område talte man et år (startåret) 39 fugle af en bestemt art. I en model beskrives antallet af fugle ved funktionen

$$N(t)=\frac{195}{1+4\cdot e^{-0,04t}}\ ,$$

hvor $N(t)$ er antallet af fugle, og t er antal år efter startåret.

a) Hvor mange fugle er der efter 10 år?

b) Hvor mange år går der, før antallet af fugle er over 100?

c) Tegn grafen for N.

d) Hvor mange fugle kan der højst være i området?

2.015 Som et mål for surhedsgraden af en væske benyttes pH-værdien, der defineres som

$$\mathrm{pH}=-\log(c)\ ,$$

hvor c betegner koncentrationen af H_3O^+-ionen og måles i mol/L (mol pr. liter).

a) Bestem koncentrationen c i en væske med pH = 2,2 .

b) Gør rede for, at hvis koncentrationen c i en væske gøres 100 gange større, vil pH blive formindsket med 2 .

2.016 Vands bevægelse i en bestemt type jordlag kan beskrives ved en model

$$f(t)=2{,}4\cdot\sqrt{t}\ ,$$

hvor $f(t)$ er antal cm, vandet er trængt ind i jordlaget, og t er antal minutter efter, at vandet er ledt ned i jordlaget.

a) Bestem $f'(t)$.
Bestem den hastighed, hvormed vandet trænger frem i jordlaget efter 4 minutter.

2.017 En vinter afbrydes varmen i et hus. I en periode, hvor udetemperaturen er konstant, måler man, hvordan temperaturen falder i huset. Målingerne viser, at temperaturen (målt i °C) i huset t timer efter varmeafbrydelsen med god tilnærmelse kan beskrives ved funktionen

$$f(t) = 5{,}0 + 15{,}1 \cdot e^{-0{,}046 \cdot t} .$$

a) Hvad er temperaturen i huset 8 timer efter varmeafbrydelsen?

b) Hvor lang tid går der efter varmeafbrydelsen, før temperaturen kommer under $10\ °C$?

c) Bestem differentialkvotienten $f'(12)$ og gør rede for, hvad dette tal fortæller om temperaturen i huset.

2.018 Rogn fra en bestemt slags fisk lægges i en saltlage for at øge holdbarheden. Når rognen har ligget t timer i saltlagen, er saltkoncentrationen i rognen $f(t)$, målt i gram salt pr. kg rogn, bestemt ved

$$f(t) = 2{,}7 \cdot (1 - e^{-0{,}021 \cdot t}) .$$

a) Bestem saltkoncentrationen i rognen, når den har ligget 24 timer i saltlagen.

b) Til hvilket tidspunkt er saltkoncentrationen i rognen nået op på 2,0 gram salt pr. kg rogn?

c) Bestem den hastighed, hvormed saltkoncentrationen i rognen vokser til tidspunktet $t = 24$.

d) Hvilken betydning har tallet 2,7 for saltkoncentrationen i rognen?

2.019 USA's befolkningstal kan i perioden 1800-1950 med god tilnærmelse beskrives ved modellen

$$f(x) = \frac{198}{1 + 36{,}2 \cdot e^{-0{,}0313 \cdot x}} ,$$

hvor $f(x)$ er befolkningstallet (i millioner indbyggere) x år efter år 1800.

a) Hvornår nåede befolkningstallet i USA op på 50 millioner indbyggere?

b) Bestem befolkningstallets vækshastighed i 1925.

2.020 Det årlige antal tilfælde af kogalskab (BSE) i Storbritannien i perioden 1993-2000 kan med god tilnærmelse beskrives ved

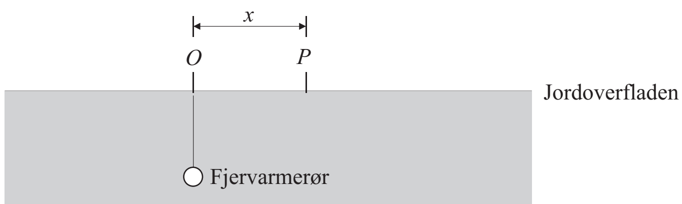
$$f(x) \quad 34\,800 \;\; e^{\;0,4492\;\; x} \;,$$

hvor $f(x)$ er det årlige antal tilfælde af kogalskab, og x er antal år efter 1993.

a) Kommentér udviklingen, når det oplyses, at antallet af tilfælde af kogalskab i Storbritannien i 2004 var 343.

Kilde: BioNyt nr. 114, JORD OG VIDEN NR. 9, 2001 og World organisation for animal health (OIE) 2005.

2.021 Et fjernvarmerør afgiver varme til omgivelserne og bevirker derved en temperaturstigning på jordoverfladen tæt ved røret. Nedenstående figur viser et lodret snit vinkelret på fjernvarmerøret.



En vinterdag er temperaturen $f(x)$, målt i C, i et punkt P på jordoverfladen givet ved

$$f(x) \quad 3,0 \;\; \ln \frac{x^2 \quad 7,8}{x^2 \quad 1,5} \quad 3,5 \;,$$

hvor x er afstanden fra punktet O til punktet P, målt i meter (se figur).

a) Bestem $f(4)$ og forklar, hvad dette tal betyder.

b) Bestem, inden for hvilken afstand fra punktet O temperaturen på jordoverfladen er 0°C eller derover.

c) Bestem $f'(1)$.
Hvad fortæller dette tal om temperaturen ved jordoverfladen?

Kilde: Benny Bøhm: Heat losses from buried district heating pipes, Polyteknisk Press, 1999.

2.022 Parablen $\mathcal{P}$ er graf for funktionen f givet ved $f(x) \quad 0,25x^2 \quad 2x \quad 1$.

a) Bestem en ligning for tangenten t til $\mathcal{P}$ i punktet $R(5, f(5))$.

2.023 Temperaturen (målt i C) i en speciel ovn til brandprøvning udvikler sig som en funktion af tiden t (målt i antal minutter efter at ovnen er tændt). Det oplyses, at temperaturen som funktion af tiden kan beskrives ved funktionen

$$f(t) \quad 20 \quad 150 \quad \ln(8t \quad 1) \ ,$$

hvor $f(t)$ er temperaturen, og t er tiden.

a) Giv en beskrivelse af den information, som funktionen giver om temperaturudviklingen i ovnen, og inddrag heri en fortolkning af $f'(2)$ og $f'(20)$.

Kilde: DS 1051.1 Brandprøvning. Bygningsdeles modstandsevne mod brand, 1979.

2.024 En funktion f givet ved $f(x) \quad 0{,}25x^2 \quad 2x \quad 1$.

a) Gør rede for, at linjen med ligningen $y \quad 2x \quad 1$ er tangent til grafen for f.

2.025 En funktion f er givet ved $f(x) \quad x^3 \quad 1{,}5x^2 \quad 6x \quad 1$.

a) Bestem en ligning for tangenten t til grafen for f i punktet $P(3, f(3))$.

b) Gør rede for, at grafen for f har en anden tangent med samme hældningskoefficient som tangenten t, og bestem koordinatsættet til røringspunktet for denne tangent.

2.026 Funktionen f er givet ved $f(x) = x^3 + kx^2 - 2x + 5$, hvor k er et reelt tal. Det oplyses, at f har lokalt minimum i $x = 1$.

a) Bestem tallet k .

2.027 Overskuddet i en virksomhed kan bestemmes ved funktionen

$$f(x) \quad 80 \quad x^{0,4} \quad 4x \quad 100 , \quad x \quad [0;130] ,$$

hvor $f(x)$ er overskuddet (i tusinde kr.), og x er antal solgte ton.

a) Tegn grafen for f.

b) Bestem x, således at overskuddet er størst.

2.028 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) \quad \mathrm{e}^x \quad 2x\,.$$

a) Skitsér grafen for f, og benyt differentialregning til at argumentere for grafens forløb.

2.029 En funktion f er givet ved

$$f(x) \quad x^3 \quad 2{,}5x^2 \quad 2x \quad 7\,.$$

a) Løs ligningen $f'(x) \quad 0$.

b) Bestem monotoniforholdene og de lokale ekstrema for f.

2.030 En funktion f er givet ved

$$f(x) \quad 2x^3 \quad 3x^2 \quad 36x\,.$$

a) Bestem monotoniforholdene for f.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

2.031 Overfladearealet af en cylinderformet dåse med indhold 800 mL kan beskrives ved funktionen

$$O(x) \quad \frac{1600}{x} \quad 2 \quad x^2\,,$$

hvor x angiver dåsens radius, målt i cm.

a) Bestem radius x, så overfladearealet er mindst mulig.

2.032 Funktionen f er bestemt ved $f(x) \quad \frac{2}{x} \quad 3\,, \quad x \quad 0$.

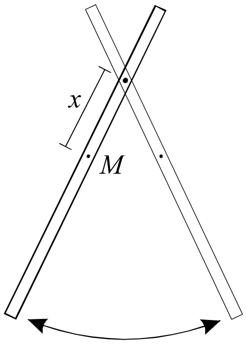
a) Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $(1,1)$.

2.033 En funktion f er bestemt ved $f(x) \quad 2x \quad 3$.

Med F betegnes en stamfunktion til f.

a) Bestem F, når det oplyses, at grafen for F går gennem punktet $P(0,1)$.

2.034



En tynd stang kan svinge som et pendul, når den ophænges i et punkt af stangen. Stangen er 1,0 meter lang. Afstanden fra ophængningspunktet til stangens midtpunkt M betegnes x og måles i meter.
Svingningstiden T for denne stang måles i sekunder og er givet ved formlen

$$T = 0{,}58\cdot\sqrt{\frac{1+12x^2}{x}}\ ,\quad 0 < x \le 0{,}5\ .$$

a) Bestem svingningstiden, når stangen svinger om et punkt 0,060 meter fra midtpunktet.

b) Hvor langt fra midtpunktet skal stangen hænges op, hvis svingningstiden skal være 2,0 sekunder?

c) Bestem den mindst mulige svingningstid for stangen.

2.035 En funktion f er bestemt ved $f(x) = 2x - 3$.
Med F betegnes en stamfunktion til f.

a) Bestem F, når det oplyses, at linjen med ligning $y = x + 5$ er tangent til grafen for F.

2.036 En funktion f er givet ved $f(x) = x^3 - 6x^2$.

a) Bestem nulpunkterne for f.

b) Bestem arealet af det område, som afgrænses af grafen for f og førsteaksen.

2.037 En funktion f er bestemt ved $f(x) \quad x^4 \quad 4x^3 \quad x^2 \quad 8$.

a) Tegn grafen for f, og bestem nulpunkterne for f .

b) Bestem arealet af det område, der afgrænses af grafen for funktionen f og x-aksen.

2.038 En funktion f givet ved $f(x) \quad 0{,}25x^2 \quad 2x \quad 1$.

a) Bestem integralet $\,_{2}^{5} f(x)dx$, og giv en fortolkning af dette integral.

2.039 Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) \quad x^3 \quad 1{,}5x^2 \quad 6x \quad 1 \quad \text{og} \quad g(x) \quad 6{,}5 \quad x .$$

a) Løs ligningen $f(x) \quad g(x)$.

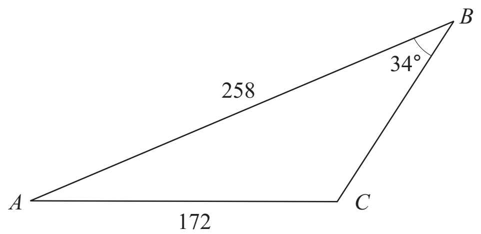
I første kvadrant afgrænses der mellem grafen for f og grafen for g et område, der har et areal.

b) Bestem dette areal.

2.040 I trekant ABC er $|AB| \quad 11{,}9$, $|BC| \quad 26{,}4$, vinkel $C \quad 23{,}5$, og vinkel A er stump.

a) Bestem vinkel A .

2.041

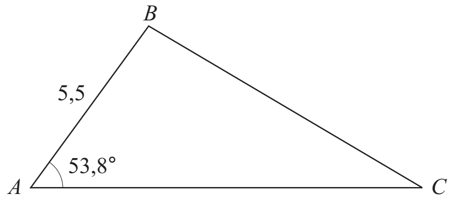


Figuren viser trekant ABC, hvor vinkel C er stump. Nogle af målene fremgår af figuren.

a) Bestem vinkel C .

b) Bestem arealet af trekant ABC .

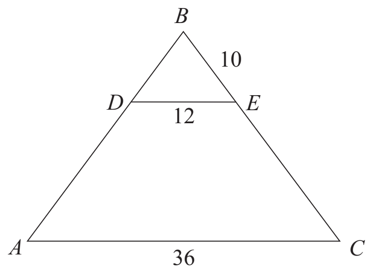
2.042



Figuren viser en trekant ABC, hvor A 53,8 og $|AB|$ 5,5. Arealet af trekant ABC er 24,4.

a) Bestem $|AC|$ og $|BC|$.

2.043



I den ligebenede trekant ABC, hvor $|AB|$ $|BC|$, er DE parallel med AC, $|DE|$ 12, $|BE|$ 10 og $|AC|$ 36.

a) Bestem $|BC|$ samt arealet af trekant ABC.

2.044 En byggegrund har form som en firkant $ABCD$, hvor vinkel $A = 80°$, vinkel $B = 60°$, vinkel $C = 105°$, $|AD|$ 21m og $|AB|$ 50m.

a) Tegn en model af byggegrunden, og bestem længden af diagonalen BD.

b) Bestem arealet af byggegrunden.

2.045 En trekant ABC er bestemt ved, at $a = 9$, $b = 12$ og $c = 10$.

a) Bestem størrelsen af vinkel A.

b) Bestem arealet af trekant ABC.

VEJLEDENDE EKSAMENSSÆT

HF B-NIVEAU

MAJ - JUNI 2007 HF- Vejledende sæt 1

MATEMATIK B-NIVEAU

Xyzdag den uv. maj 2007 kl. 9.00-10.00 DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

De stillede spørgsmål indgår med lige vægt i vurderingen

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

3.001

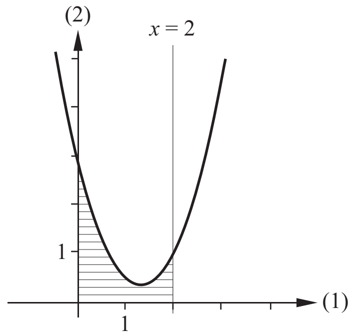
Opgave 1

a) En funktion f er givet ved $f(x) \quad 5e^x \quad x^4$.
Bestem $f'(x)$

b) Løs ligningen $2x^2 \quad x \quad 3 \quad 0$.

c) Grafen for en lineær funktion f går gennem punkterne $P(\quad 6,4)$ og $Q(2,8)$.
Bestem en forskrift for f.

d)



En funktion er givet ved $f(x) \quad 1{,}5x^2 \quad 4x \quad 3$.

Bestem arealet af det område, der begrænses af grafen, førsteaksen, andenaksen og linjen med ligningen $x = 2$ (se figur).

e) En funktion f opfylder følgende:

f har definitionsmængden $\mathbb{R}$.
f er differentiabel.
Nulpunkter og fortegn for f' er som angivet på tallinjen:

x:		–3		1		6	
$f\ (x)$:	+	0	–	0	+	0	+

Angiv monotoniintervallerne for funktionen f.
Skitsér grafen for f.
(Der er mange muligheder for, hvordan en sådan graf kan se ud. Der ønskes blot tegnet én mulig graf.)

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

MAJ - JUNI 2007 HF- Vejledende sæt 1

MATEMATIK B-NIVEAU

Xyzdag den uv. maj 2007 kl. 9.00-13.10 DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

De stillede spørgsmål indgår med lige vægt i vurderingen
Kun én af opgaverne 9a og 9b må afleveres til bedømmelse

3.002

Opgave 2 Udviklingen i det danske skovareal kan beskrives ved følgende matematiske model:

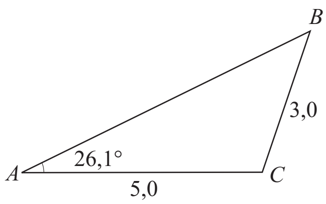
$$y \quad 417\,000 \quad 1{,}007^{x} \,,$$

hvor y er skovarealet (målt i hektar), og x er antal år efter 1990.

a) Hvad fortæller tallene 417 000 og 1,007 om udviklingen i det danske skovareal?

3.003

Opgave 3



I trekant ABC er $\quad A \quad 26{,}1$, $|AC| \quad 5{,}0$ og $|BC| \quad 3{,}0$. Vinkel C er stump.

a) Bestem vinklerne B og C.

b) Bestem $|AB|$.

c) Bestem længden af medianen m_c.

3.004

Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) \quad 2x \quad 3\,.$$

a) Bestem en stamfunktion til f.
Bestem den stamfunktion F, hvor førsteaksen er tangent til grafen for F.

VEND

3.005

Opgave 5 Verdensproduktionen af zink kan for perioden 1900-1990 tilnærmelsesvis beskrives ved modellen

$$y \quad b \, \mathrm{e}^{k\,t} \,,$$

hvor y er verdensproduktionen af zink (målt i megaton), og t er antal år efter 1900.
I 1900 var verdensproduktionen af zink 0,40 megaton.
I 1990 var verdensproduktionen af zink 7,0 megaton.

a) Bestem tallene b og k .

b) Bestem fordoblingstiden for verdensproduktionen af zink ifølge modellen.

c) Kommentér modellen, når det oplyses, at verdensproduktionen af zink i 2000 var 8,0 megaton.

3.006

Opgave 6 BMI (Body Mass Index) er et mål for kroppens fedtmasse. Det udregnes ved formlen

$$\mathrm{BMI} \quad m \;\; x^{\;\;2} \,,$$

hvor m er personens vægt, målt i kg, og x er højden, målt i meter.
Personerne A og B vejer begge 80 kg, og A er 6% højere end B.

a) Hvor mange procent er A's BMI mindre end B's BMI?

3.007

Opgave 7 En funktion f er givet ved

$$f(x) \quad x^3 \quad x^2 \quad 5x \quad 3 \,.$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(3, f(3))$.

b) Bestem monotoniforhold og lokale ekstrema for f .

3.008

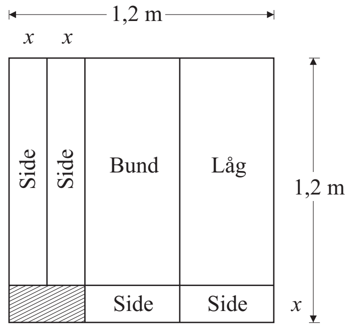
Opgave 8 En funktion f er givet ved

$$f(x) \quad x^2 \quad \frac{1}{x} \,, \quad x \quad 0 \,.$$

a) Bestem koordinatsættet til det punkt på grafen for f, hvor tangenthældningen er –3 .

3.009

Opgave 9a En kvadratisk metalplade med sidelængden 1,2 m udskæres som vist på figuren. Det skraverede område kasseres, og resten svejses sammen til en kasse med højden x (målt i meter), hvor $0 \quad x \quad 0{,}6$.



a) Gør rede for, at kassens rumfang (målt i m^3) som funktion af højden x er bestemt ved

$$R(x) \quad x^3 \quad 1{,}8x^2 \quad 0{,}72x \ .$$

b) Bestem x , så kassens rumfang bliver størst muligt.

3.010

Opgave 9b En genstand slippes i en højde af 100 meter over jorden, hvorefter den falder lodret nedad. Efter t sekunders fald befinder genstanden sig i højden $f(t)$, målt i meter over jorden, hvor

$$f(t) \quad 139{,}2 \quad 19{,}6t \quad 39{,}2 \ \ 0{,}607^t$$

a) Bestem, hvornår genstanden rammer jorden.

b) Bestem $f'(2)$ og gør rede for, hvad dette tal betyder.

Kun én af opgaverne 9a og 9b må afleveres til bedømmelse

MATEMATIK B-NIVEAU

Xyzdag den uv. maj 2007 kl. 9.00-10.00 DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

De stillede spørgsmål indgår med lige vægt i vurderingen
BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

3.011

Opgave 1

a) En parabel har ligningen $y \quad x^2 \quad 4x \quad 3$
Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt, og tegn parablen.

b) Isoler n i formlen $s \quad 5(n \quad 4) \quad r$.

c) Funktionen f er givet ved $f(x) \quad \ln(x) \quad x \quad 3$.
Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(1, f(1))$.

d) En funktion f er bestemt ved $f(x) \quad 6x^2 \quad 2x \quad 5$.
Bestem den stamfunktion F til f, som opfylder $F(0) \quad 1$.

e) Befolkningstallet i New York var 36 300 i året 1790.

Opstil en matematisk model for udviklingen i befolkningstallet i New York, når det oplyses, at den årlige vækst i årene efter 1790 var 4,4 %.

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

MAJ - JUNI 2007 HF- Vejledende sæt 2

MATEMATIK B-NIVEAU

Xyzdag den uv. maj 2007 kl. 9.00-13.10 DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

De stillede spørgsmål indgår med lige vægt i vurderingen

3.012

Opgave 2 En person sætter 15 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 2,56% .

a) Hvor lang tid går der, før beløbet er fordoblet?

3.013

Opgave 3 Størrelserne p og V er omvendt proportionale.

p	2	4	
V		17	11

a) Udfyld en tabel som ovenstående.

3.014

Opgave 4 I en bestemt kommune kan sammenhængen mellem en families årlige vandforbrug og udgiften hertil beskrives ved

$$f(x) \quad 30{,}66 \quad x \quad 306{,}25 \,,$$

hvor $f(x)$ angiver udgiften til vand (i kr.), og x angiver vandforbruget (i m^3).

a) Hvad betyder tallene 30,66 og 306,25 for udgiften til vand?

VEND

3.015

Opgave 5 I plantager bliver rødgraner plantet meget tæt. I et hæfte om skovdyrkning anbefales det at foretage udtynding, efterhånden som træerne bliver højere. I nedenstående tabel ses sammenhængen mellem træhøjden og den anbefalede tæthed.

Træhøjde (meter)	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Tæthed (antal rød-graner pr. hektar)	4500	3350	2500	2000	1600	1350	1150	950	800

Det oplyses, at tætheden som funktion af træhøjden med god tilnærmelse kan beskrives ved

$$f(x) \quad b \quad x^{a} ,$$

hvor $f(x)$ er den anbefalede tæthed, målt i rødgraner pr. hektar, og x er træhøjden, målt i meter.

a) Bestem tallene a og b .

b) Hvilken tæthed skal 15 meter høje rødgraner have ifølge modellen?

c) Bestem den træhøjde, for hvilken der anbefales en tæthed på 3000 rødgraner pr. hektar.

Kilde: Praktisk skovdyrkning, De Danske Skovforeninger, 1991.

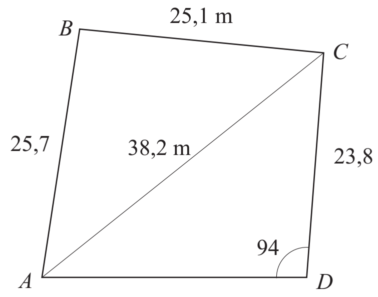
3.016

Opgave 6 En byggegrund har form som en firkant $ABCD$. Tre af siderne har følgende længder:

AB = 25,7 m, $|BC|$ = 25,1 m og $|CD|$ = 23,8 m.

Længden af diagonalen AC er målt til 38,2 m.

Endelig er vinkel D målt til 94 .



a) Bestem vinkel B .

b) Bestem byggegrundens areal.

3.017

Opgave 7 En parabel er givet ved ligningen $y \quad\quad x^2 \quad 4x \quad 5$.

a) Bestem parablens skæringspunkter med førsteaksen.

b) Bestem arealet af det område, der afgrænses af parablen og førsteaksen.

3.018

Opgave 8 En person bruger medicin mod allergi. I en model for kroppens optagelse af medicinen regner man med, at medicinkoncentrationen i blodet er givet ved

$$f(t) \quad 12 \quad 4 \quad \ln(t^2 \quad 4t \quad 6)\,, \quad 1 \quad t \quad 6\,,$$

hvor $f(t)$ er målt i milligram pr. liter, og t er antal timer efter indtagelsen af medicinen.

a) Bestem det tidsinterval, hvor koncentrationen er over 8,0 milligram pr. liter.

b) Gør rede for, hvordan medicinkoncentrationen ændrer sig i løbet af tidsrummet $1 \quad t \quad 6$. I redegørelsen skal $f'(t)$ inddrages.

3.019

Opgave 9 I et laboratorieforsøg undersøges, hvordan en bakteriekoloni udvikler sig med tiden. Det viser sig, at antallet af bakterier N som funktion af tiden t, målt i timer, kan beskrives ved funktionen

$$N \quad \frac{9560}{1 \quad 4{,}6 \;\; \mathrm{e}^{\;0,090 \quad t}}\,.$$

a) Bestem væksthastigheden $\frac{dN}{dt}$ efter 40 timer.

b) Hvad fortæller tallet 9560 om udviklingen i antallet af bakterier?